

Gruppenübung 8

Definitionen

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum (z.B. der $\mathbb{R}^n$), und $|\cdot|$ die Betragsfunktion. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*Vektor*-)Norm wenn gilt:

- a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ (Nichtnegativität).
- b) $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$ (Positivität).
- c) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität).
- d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Nun ist die Menge der quadratischen Matrizen mit reellen Einträgen $\mathbb{R}^{n \times n}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension n^2 . D.h. das Konzept der Norm lässt sich ohne weiteres auf quadratische Matrizen übertragen. Nun hat $\mathbb{R}^{n \times n}$ noch eine natürliche Multiplikationsoperation (die Matrizenmultiplikation). Für Abschätzungen kann es nützlich sein die „Größe“ von AB mit der „Größe“ von A und B in einen Zusammenhang zu setzen. Wir nennen eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Matrizennorm*, wenn die Abbildung eine Norm ist und zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

- e) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (Submultiplikativität).

Aufgabe 1 Im folgenden diskutieren wir die sogenannte *induzierte Norm*. Sei dazu $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $\|\cdot\|_{\text{ind}} : \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$\|A\|_{\text{ind}} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- a) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Lösung:

Sei also $x \in \mathbb{R}$ mit $\|x\| \neq 0$. Es gilt

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt wegen der Homogenität der Norm, das zweite wegen der Positivität der Norm. Damit gilt

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- b) Erklären Sie warum

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

gilt.

Lösung:

Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum (nach Weierstraß), nimmt eine reelle Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an. Deswegen ist das Supremum gleich dem Maximum.

- c) Untersuchen Sie, ob die induzierte Norm die Submultiplikativität erfüllt.

Lösung:

Ist $\|B\|_{\text{ind}} = 0$, dann gilt die Submultiplikativität. Sei also nun $\|B\|_{\text{ind}} \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\text{ind}} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|_{\text{ind}} \|B\|_{\text{ind}}.\end{aligned}$$

Damit ist die induzierte Norm eine Matrixnorm.

Eine Alternativlösung ist

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\text{ind}} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{\|Bx\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{\|Bx\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|_{\text{ind}} \|B\|_{\text{ind}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Sei $\|\cdot\|_{\infty} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \|x\|_{\infty} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ ist die sogenannte *Maximum-* oder auch *l_{∞} -Norm*.

- a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm ist.

Lösung:

Es gilt die vier Bedingungen zu überprüfen. Dass $\|\cdot\|_{\infty}$ nichtnegativ ist, folgt unmittelbar aus der Definition, denn der Betrag ist eine nichtnegative Funktion. Gilt $0 = \|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, dann gilt auch $|x_k| = 0$, also $x_k = 0$ und somit ist die Positivität gezeigt. Nun ist $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$. Weil $|\alpha x_k| = |\alpha| |x_k|$ gilt, ist auch die Homogenität erfüllt. Für die Dreiecksungleichung nutzen wir aus, dass diese auch für den Betrag gilt. Dann ist sicher $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$. Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{\infty} &= \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} = \|x\|_{\infty} + \|y\|_{\infty}.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm ist.

- b) Definieren Sie nun die l_{∞} -Norm für reelle quadratische Matrizen, d.h. definieren Sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Größe $\|A\|_{\infty}$. Berechnen Sie anschließend $\|M\|_{\infty}$ und $\|M^2\|_{\infty}$ für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist die so definierte l_{∞} -Norm eine Matrizennorm?

Lösung:

Wie oben schon erwähnt, ist die Menge der quadratischen Matrizen mit reellen Einträgen ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension n^2 . Deswegen definieren wir $\|\cdot\|_{\infty}$ einfach als den maximalen Betrag aller Einträge. Genauer, für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt dann

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}|.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|M\|_{\infty} = 1 \\ M^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|M\|_{\infty} = 2.\end{aligned}$$

Damit ist $\|\cdot\|_{\infty}$ aber sicher keine Matrizennorm, denn es gilt

$$\|M^2\|_{\infty} > \|M\|_{\infty} \|M\|_{\infty},$$

und damit erfüllt $\|\cdot\|_{\infty}$ die Eigenschaft der Submultiplikativität nicht.

c) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A \mapsto n\|A\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Matrizennorm ist.

Lösung:

Die Norm-Eigenschaften bleiben erhalten, es gilt also nur die Submultiplikativität zu prüfen. Sei also $A, B \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|AB\| &= n \max_{1 \leq i, j \leq n} |AB_{i,j}| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n |A_{ik} B_{kj}| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty n \|B\|_\infty \\ &= \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Wir betrachten die M - Δ -Struktur aus Abbildung 1, wobei

$$M(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

ist und $\|\Delta\|_\infty < 1$ ist.

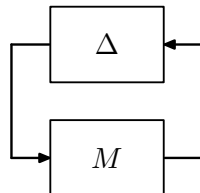


Abbildung 1: M - Δ -Struktur

- a) Zeichnen Sie das Bodediagramm von M und erklären Sie, warum der geschlossene Kreis nicht robust stabil ist.

Lösung:

Im Bodediagramm von M in Abbildung 2 liest man ab, dass die H_∞ -norm grösser als 1 ist. Gemäß Vorlesung ist das System damit nicht robust stabil gegenüber den Unsicherheiten Δ .

- b) Finden Sie ein System Δ so dass der geschlossene Kreis nicht asymptotisch stabil ist.

Lösung:

Verwende den Algorithmus aus der Vorlesung. Wir wählen zunächst eine Frequenz ω_0 so, dass $|M(j\omega_0)| > 1$ ist. Aus dem Bodediagramm liest man ab, dass dies z.B. bei $\omega_0 = 1$ der Fall ist. Nun ist

$$M(j\omega_0) = \frac{1}{j^2 + 0.2j + 1} = -5j.$$

Setze nun

$$\Delta_0 := \frac{1}{|M(j\omega_0)|} = 0.2j$$

und

$$\alpha := \pm |\Delta_0|,$$

wobei wir “+” wählen, sodass

$$\alpha = 0.2.$$

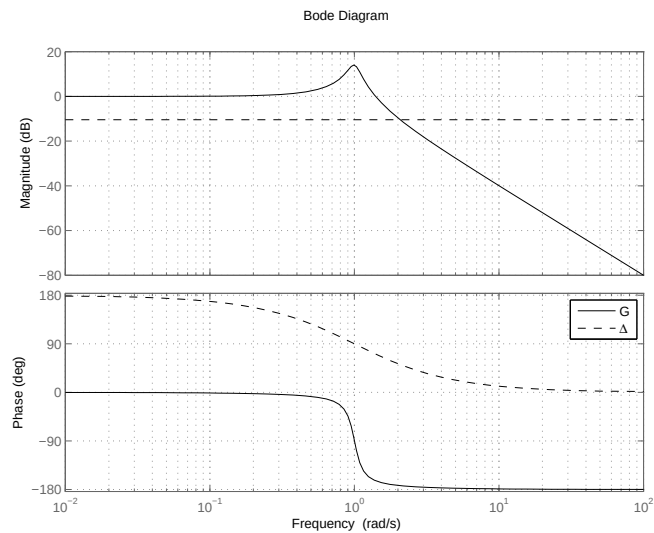


Abbildung 2: Bodediagramm von M .

Außerdem setzen wir

$$\beta := j\omega_0 \frac{\alpha - \Delta_0}{\alpha + \Delta_0} = 1.$$

Mit der Formel aus der Vorlesung ergibt sich

$$\Delta(s) = \alpha \frac{s - \beta}{s + \beta} = 0.2 \frac{s - 1}{s + 1}.$$

Für den geschlossenen Kreis ergibt sich dann die Übertragungsfunktion

$$\frac{s + 1}{s^3 + 1.2s^2 + s + 1.2}.$$

Deren Nenner erfüllt die Vorzeichenbedingung, aber nicht die Beiwertebedingung. Damit ist das System nicht asymptotisch stabil.